



IIPS

Institute for
International Policy Studies

▪ Tokyo ▪

格差分布の統計的ダイナミクス

・ 平和研レポート ・
客員研究員 下方 拓

IIPS Policy Paper 332J
May 2008

財団法人
世界平和研究所

© Institute for International Policy Studies 2008

Institute for International Policy Studies
6th & 7th Floor, Toranomon 30 Mori Building,
3-2-2 Toranomon, Minato-ku
Tokyo, Japan 〒105-0001
Telephone (03)5404-6651 Facsimile (03)5404-6650
HP:<http://www.iips.org>

本稿での考えや意見は著者個人のもので、所属する団体のものではありません。

格差分布の統計的ダイナミクス

-微視的な制度設計と巨視的な集計効果の関係性-

Statistical Dynamics of Disparity Distribution

from the micro institutional designs to the macro statistical aggregation

下方 拓

GEHO, Taku

世界平和研究所 客員研究員 IIPS visiting research fellow

2008年5月

概要

Statistical Dynamics of Disparity Distribution from the micro institutional designs to the macro statistical aggregation

Recent many debates about widening social inequality in Japan, so-called "a society of widening disparities," depend on one's own sense of social values without capturing the relations between institutional designs and social disparities. Exploring various statistical information of the gini index, income distributions and so-called "Long tail" theory of ITbusiness, this paper presents an elementary random multiplicative process model to study dynamics between micro institutional design parameters and macro distributional parameters using long period income data and simulations.

This paper deals with information about institutional gaps with probabilities which links to the gini index, expectations and variances – social disparities and economic growths – of realized Lognormal and Pareto distributions. Specifically, a subtle trade-off was found between institutional gaps and social disparities, and in such case institutional gaps does not always lead to widening disparities.

Keywords: gini index, a society of widening disparities, income distribution, Longtail, institutional design, statistical dynamics

目次

1	格差をめぐる議論と本論の位置づけ	1
1.1	ユビキタス不平等社会	1
1.2	ユビキタスな格差の論点	2
1.3	本論のアプローチ	3
2	格差の統計メカニクス	4
2.1	連続的確率分布によるジニ係数の表現	4
2.1.1	平均偏差アプローチのジニ係数	4
2.1.2	幾何的アプローチによるジニ係数	5
2.2	格差分布を生むシンプルな二項モデル	7
2.2.1	対数正規分布となるシンプルなメカニズム	7
2.2.2	対数正規分布における機会と実現格差	9
2.3	ロングテール仮説の分布構造	12
2.3.1	パレート分布と順位・頻度（ロングテール）分布	12
2.3.2	ロングテールにおける順位シェアの変化	13
2.3.3	パレート（ロングテール）分布におけるジニ係数	14
2.3.4	対数正規分布とパレート分布の関係	15
2.4	本章のまとめ	16
3	二項モデルによる所得分布の構造変化分析	17
3.1	本章のねらい	17
3.2	データと方法	17
3.3	分析	18
3.3.1	パラメーターの推定と所得分布の特徴	18
3.3.2	ディスカッション	22
3.4	結論	27

1 格差をめぐる議論と本論の位置づけ

1.1 ユビキタス不平等社会

近年、「格差」をめぐる議論が多くの分野で行われてきている。「格差社会」という言葉が話題になり、「所得格差の拡大」や「地方と都市の経済格差の拡大」が問題として取り上げられ、ニートやフリーターという若者の労働機会をめぐる激しい議論も行われている(大竹, 2006)。

しかし、人間を含めた自然界の物象にはその能力・資質・性質・スペックにある程度の「ばらつき」が存在しているので、「ばらつき」の様々な相互作用の結果が「格差」として現れる。ある意味、「格差」は遍在するユビキタスubiquitousな事象である。

遍在する事象の結果として生じる「格差」に善悪をつけて議論し、そのプロセスに目を向けずに「格差=悪」とする議論はナンセンスなことであるが、いくら冷静に分析的にアプローチしようとしても、人間社会において「格差」のもつ意味を問うことは分析者の価値観に大きく依存してしまう(大竹, 2006)。

たとえば、社会学的なアプローチの多くは、社会階層データやフィールドワークにもとづいた実証的なアプローチが中心である。格差が広がっているような状況と社会制度との関係性を検証しようとする、常に限られた変数を対象とする格差の実証しようとする。変数の選択には価値観と恣意性が入り込む余地が多く、その変数と格差の因果関係を前提にした統計解析が行われるので、たとえ統計的有意性が検出されてとしても、無関係であるとする仮説が棄却されるだけで、その変数と対象となる格差の直接的な因果が実証されたわけではなく、直接的な因果関係はいつまでたっても明確にはならない。メタ的な視点では、「格差問題」自体が社会的構成物であるといえる。ましてや、「ニート」やその裏返しのような「ヒルズ族」への視線は、極端な事象を拡大するマス・メディアの社会的なバイアスのなかで形成・増幅されやすい。

また、経済学的な分析では、経済成長と格差や貧困の関係を実証的に研究しようとしても、分析モデル自体が価値観に左右されている。新古典派経済成長モデル(物的資本の蓄積が経済成長に大きく寄与するモデル)や、ソローの成長会計モデル(技術革新による全要素生産性の向上が経済成長に寄与するモデル)などにおいても、生産関数の構造や資本・労働力における恣意的な関係性を前提に構築されているので、分析モデルを選択したとたんに、ある特定の見方に縛られてしまう。

そこで、本論は、格差を社会的な意味として考えるのではなく、格差自体がユビキタス

な事象であると考え、そして、社会に発生する格差のダイナミクスにどのような統計的なメカニズムが作用しているかを考察し、制度設計においてミクロな確率的事象が集積されていけばどのようなマクロ構造をとるかということ、統計力学的なアプローチも視野にいれながら議論を進めていきたい。

このような方法論が確立されれば、「社会制度」における「実現値」と「確率」をどのように設計すれば望ましい集計的な効果が得られるか、ということ考察するが可能になると考えられる。

1.2 ユビキタスな格差の論点

まず、「格差」に対する統計的なアプローチを行っている労働経済や開発経済、IT分野における論点を概観しよう。

- 家計所得においては、ジニ係数にみる個人所得格差の緩やかな拡大傾向が観察されている。その原因には高齢化による高齢層の所得格差の影響等が指摘されているものの、労働者の所得格差は拡大しており、政策や制度と所得格差の関係性については統計・分析が不足している(大竹, 2006; 内閣府, 2006)。
- 個人所得の変動は上位数パーセントのごく少数の一握りの変動によって説明されている。特に、最近の米国における変動要因は、金融資産などではなく主に給与所得によるものである。その原因として、IT化・グローバル化によりマネジメント・スキル障壁が低下し、トップ・セグゼキュティブの給与所得が高騰したなどの理由があげられている(Piketty and Saez, 2006)。
- 開発経済的な視点では、低開発国の成長にあわせて所得格差が拡大し、中所得国へ移行するにあたって格差が縮小するとする「クズネッツ仮説」には否定的なコンセンサスが形成されている。経済成長と貧困の解消にはポジティブな統計的関係性が見出されているが、経済成長と格差に関するダイナミックな関係性は十分に記述されているとはいえない(白井, 2004; Deninger and Squire, 1997)。
- 従来の経済学の枠組みではなく、要素間の相互作用や統計力学などの物理現象へのアプローチをつかった「経済物理学」による所得分布の構造解析が試みられている。成果として、所得分布におけるパレート指数などのパラメーターと経済成長・所得格差の関係性が明らかにされつつある(Souma, 2000, 2002; Kaizouji, 2006)。ITコンテンツ分野で盛んに取り上げられる「ロングテール理論」においても、前提としている分布構造は非常に似ている(Anderson, 2006)。しかし、規模の増大による効果の議論が先行し、べき指数の変化を伴う本質的な変化を捉えていない(下

方, 2006) .

このように、所得分布や経済成長・格差に対する既存のアプローチでは、格差と経済成長に特定の関係性を前提としたモデル・理論を持ち込んだ実証研究が展開されている。しかし、そこで見出される関係性には統計的な蓋然性があっても、明確な因果関係を想定することは難しい。

経済物理学的なアプローチでは、規模分布と成長の間関係性について変数間の相互作用の集計的効果を見出そうとする。しかし、現在のところ集計効果をもとに制度設計の分析にまで踏み込んだ議論は行われていない。

1.3 本論のアプローチ

そこで、本論では、格差分布の変化と制度的なインプリケーションを橋渡しをするために、分布構造を示すパラメーターと格差分布のダイナミックな関係性を記述し、制度的なインプリケーションのもとでの格差分布の変化を考察をする。本論では格差に関するサイズ（規模）分布を格差分布と呼んでいる。一般的な用語ではないが、問題意識にフォーカスするためにこの用語を使用する。

まず、第2章において、サイズの規模分布（格差分布）と格差の関係性についての定式化を行う。まず、規模分布の特徴的なパラメーターと格差の関係性を記述するために、ジニ係数と分布パラメーターの関係を対数正規分布を生むシンプルなマルチプリカティブプロセス（乗数過程）のもとで検討する。さらに、「ロングテール理論」で議論されているパレート指数と格差分布の関係性を議論する。

そして、第3章において、実際の所得分布の長期データを使用し、第2章で記述した関係性を検証する。それをもとに制度的なインプリケーションに基づいて、パラメーターと格差分布の変化のシミュレーションを行う。

本論では、これらのシミュレーションにより、シンプルな乗数過程を使って格差の変化を検討することが可能なことを示した。その結果、特徴的なこととして、制度として表現される格差（例えば給与制度において規程される給与水準）と格差分布の間には単純な線形ではない、微妙なトレード・オフを示す状況があることが示された。例えば、ある局面においては、制度の格差が拡大しても、分布としての格差は縮小するような状態も起こりうることを確認した。

2 格差の統計メカニクス

本章では、格差とサイズ分布の関係性を記述するために、格差分布の特徴的なパラメーターと実際に出現する格差の統計的な関係性を記述し、次章での分析の準備をおこなう。

具体的には、格差の代表的な指標であるジニ係数を連続分布によって定義し、格差分布のパラメーターとの連結を検討する。そして、具体的な制度設計と結びつくプロセスとして、2つの実現値と確率によって記述されるシンプルな二項モデルによるマルチプリカティブ・プロセスを導入し、制度設計パラメーターと対数正規分布のパラメーター、格差指標との関係性を記述する。

さらに、ロングテールに代表されるパレート分布の構造変化とジニ係数の関係性について述べる。

2.1 連続的確率分布によるジニ係数の表現

まず、格差を示す代表的な指標であるジニ係数が確率分布とどのような関係にあるかを考えておく必要がある。特に連続分布によって近似することで、規模分布のパラメーターと連結することが可能になる。

主に所得格差を対象にしたジニ係数についての文献サーベイは (Xu, 2004) に詳しく、ジニ係数の表現として、幾何学的 geometric なアプローチ、平均偏差 mean difference アプローチ、共分散 covariance アプローチ、行列 matrix form アプローチが紹介されている。いずれも同じものを表現しているが、計算アプローチの違いによって分析方法が異なる。

2.1.1 平均偏差アプローチのジニ係数

(Xu, 2004) によると、ジニのオリジナルなアプローチは平均偏差アプローチである。全ての要素間の偏差の絶対値を集計し、総数で割って平均的な絶対偏差を計算する。要素の数が n である同一分布からの変数 y_i と y_j において、平均偏差は次のようになる。

$$\Delta = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |y_i - y_j| = E|y_i - y_j| \quad (2.1)$$

これは $|y_i - y_j|$ という要素間の偏差を確率変数とする期待値という意味でもある。ジニ係数はこの期待値を変数の平均値 μ_y でわることで、相対的な指標にし、さらに2でわ

ることで、最大値を 1 に調整したものである。

$$G = \frac{\Delta}{2\mu_y} \quad (2.2)$$

ジニ係数は常に相対平均偏差 $\frac{\Delta}{\mu_y}$ の $\frac{1}{2}$ となるという特徴をもっていることがわかる。全ての要素がわかっているときには、この方法で計算されることが多い。

2.1.2 幾何的アプローチによるジニ係数

ローレンツ曲線

これに対して、幾何的なアプローチは、ローレンツ曲線と 45 度線の関係からジニ係数を考える。まず、要素を最小のものから最大のものまで順番に並べ、最大のを 1 とした相対的な順位を割り振る。ローレンツ曲線は、ある相対的な順位において、最小のものからその要素の順位までの要素のサイズの合計が全体のサイズに占める相対的な比率（全要素のサイズの合計は 1）を表す。全体の要素の数が n で、要素 y_i を小さい順 $y_i < y_{i+1}$ となるようにならべてあるとすると、その要素の平均 μ_y が $\mu_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ であるときに、ある順位 i のローレンツ曲線の値 L_i は

$$\begin{aligned} L_i &= \frac{\sum_{j=1}^i y_j}{n\mu_y} \\ &= \frac{1}{n\mu_y} \sum_{j=1}^i y_j \end{aligned} \quad (2.3)$$

これを連続分布であらわすと、サイズ y となる確率密度関数を $f(y)$ 、累積分布関数を $F(y) = \int_{-\infty}^y f(y)dy$ とすると、サイズ y の累積分布確率が $p = F(y)$ であるローレンツ曲線は

$$L(p) = L(F(y)) = \frac{\int_{-\infty}^y yf(y)dy}{\int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy} = \frac{1}{\mu_y} \int_{-\infty}^y yf(y)dy, \quad p \in [0, 1] \quad (2.4)$$

とあらわすことができる。

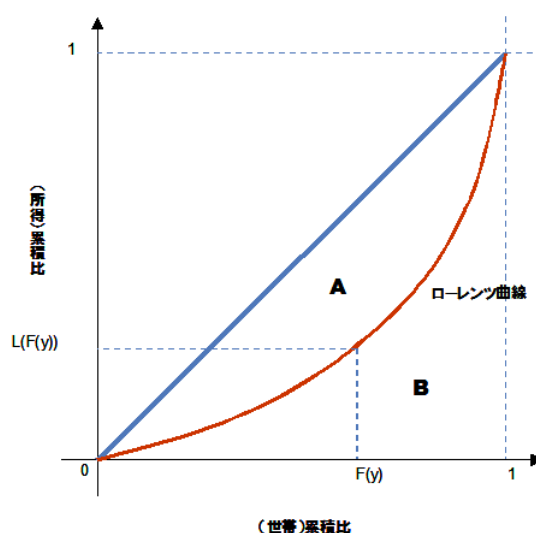
また、(Kleiber, 2005) に示されるように、累積分布関数 $F_Y(y)$ の逆関数 $F_Y^{-1}(p)$ が存在するとすれば、

$$F_Y^{-1}(p) = \sup\{y | F_Y(y) \leq p\}, \quad p \in [0, 1] \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
 L(p) &= \frac{1}{\mu_y} \int_{-\infty}^y y f(y) dy \\
 &= \frac{1}{\mu_y} \int_0^p F_Y^{-1}(t) dt, \quad p \in [0, 1]
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

このローレンツ曲線は図 2.1 のように表現される .

図 2.1 ジニ係数とローレンツ曲線



ジニ係数

すべての要素が同じサイズ, つまり完全に平等であれば, ローレンツ曲線は右上がり 45 度の直線になる . 不平等をあらわす指数として, ジニ係数はこの 45 度線とローレンツ曲線の乖離の度合いを示すように計算される . 45 度線とローレンツ曲線で囲まれた領域を A , ローレンツ曲線と横軸で囲まれた領域を B とすると, 45 度線より下の領域の面積は $A + B = \frac{1}{2}$ である . このとき, ジニ係数 G は

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{A}{A + B} \\
 &= 2A \\
 &= 1 - 2B
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

と表現される .

B はローレンツ曲線の累積分布にほかならないので、 $a \leq y \leq b$ とすると

$$\begin{aligned} G &= 1 - 2B \\ &= 1 - 2 \int_0^1 L(p) dp \\ &= 1 - 2 \int_a^b L(F(y)) f(y) dy \end{aligned} \tag{2.8}$$

以上のように、格差分布の状態は連続分布として定義されたジニ係数で表現することができる。

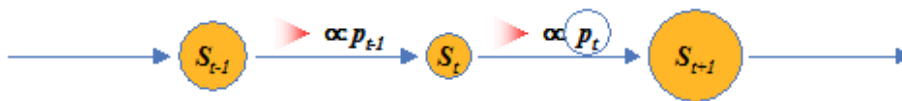
2.2 格差分布を生むシンプルな二項モデル

2.2.1 対数正規分布となるシンプルなメカニズム

次に、この格差分布を生む制度設計とのつながりを考えるために、シンプルな制度的な構造をもち、所得分布や順位分布のような「格差」分布を生み出すシンプルなモデルとして、ランダム・マルチプリカティブ・プロセス（乗数過程）を考える。

ランダム・マルチプリカティブ・プロセスは、一時点前の状態に依存して次の時点の状態が確率的に決定されるようなモデルである（図 2.2）。たとえば、所得分布においては会社における給与の変化などに当てはめるとわかりやすい。

図 2.2 シンプルなランダム・マルチプリカティブ・プロセス



ここではシンプルに考えるために、(Render, 1990) を参照し、実現値が正の実数 z_1, z_2 となる二項分布を前提にしたランダム・マルチプリカティブ・プロセス・モデルを考え、一般性を失わない形で $z_1 \geq z_2$ とする。各試行でそれぞれの事象が発生する確率は独立し p, q である ($p + q = 1$) とすると、 N 回の試行を繰り返すと、いったいどのようなサイズの分布になるのか、という問題を考える。

N 回の試行のなかで、 z_1 が起った回数を n 回とする（たとえば給与モデルなら z_1 が昇給幅で 1.2 や 1.15 という値をとり、 n は昇給した回数とでも考えればいい。 z_2 を 1 とすれば昇給しないということでもある。）と、 N 回後には $z_1^n z_2^{N-n}$ （生じるサイズということとで S と呼ぼう）という状態になっている。このとき、 z_1 が n 回生じる確率は二項分布

により次のように決定される .

$$p(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \quad (2.9)$$

ここで, $\binom{N}{n}$ は二項係数 $\frac{N!}{n!(N-n)!}$ である .

N 回後に生じているサイズ分布の平均値は二項定理により次のように計算される (Render, 1990) .

$$\langle S \rangle = \sum_n p(n) \cdot S = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \cdot z_1^n z_2^{N-n} = (pz_1 + qz_2)^N \quad (2.10)$$

このとき, $N \rightarrow \infty$ において, z_1 が n 回生じる確率 $p(n)$ は正規分布で近似できることが知られているので ,

$$p(n) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} \exp\left(-\frac{(n - Np)^2}{2Npq}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(n - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.11)$$

$p(n)$ は二項分布の平均・分散をパラメーターとしてもち, 平均 $\mu = Np$ で分散 $\sigma^2 = Npq$ の正規分布の確率密度関数である .

ここで, $S = z_1^n z_2^{N-n} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n z_2^N$ であるから, 両辺の対数をとって変形すると

$$n = \frac{\log \frac{S}{z_2^N}}{\log \frac{z_1}{z_2}} \quad (2.12)$$

また, $\log \frac{z_1}{z_2} = a$, $z_2^N = b$ とおくと,

$$n = \frac{\log \frac{S}{z_2^N}}{\log \frac{z_1}{z_2}} = \log \left(\frac{S}{b}\right)^{\frac{1}{a}} \quad (2.13)$$

さらに, $\left(\frac{S}{b}\right)^{\frac{1}{a}} = m$ とおくと, $n = \log m$ と書ける .

$p(n)$ は正規分布の密度関数なので, 式 2.11 に変数変換を行うことで,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} p(n) dn \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{m} p(\log m) dm \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{S}{b}\right)^{\frac{1}{a}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(\log\left(\frac{S}{b}\right)^{\frac{1}{a}} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{dm}{dS} \cdot dS \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 a^2}} \frac{1}{S} \exp\left(-\frac{(\log S - (\mu a + \log b))^2}{2\sigma^2 a^2}\right) dS \end{aligned} \quad (2.14)$$

これで、二項モデルによるマルチプリカティブ・プロセスによって実現されるサイズ S は、パラメーター $\mu_s = (\mu a + \log b)$, $\sigma_s = \sigma a$ をもつ対数正規分布であるといえる。このとき $a = \log \frac{z_1}{z_2}$, $b = z_2^N$ である。

これを実現されるサイズ S の確率密度関数 $p_s(S)$ として書き直すと、

$$p_s(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_s^2}} \frac{1}{S} \exp\left(-\frac{(\log S - \mu_s)^2}{2\sigma_s^2}\right) \quad (2.15)$$

となる。

また、サイズの中央値メディアンは $F(\text{median}) \leq 0.5$ となる値で、対数正規分布では

$$\text{median} = \exp(\mu_s) = \exp(\mu a + \log b) = \exp\left(\mu \log \frac{z_1}{z_2} + \log z_2^N\right) \quad (2.16)$$

となる。つまり、メディアンは確率の平均が上昇すれば大きくなり、各回の試行で生じるサイズの対数比に比例して大きくなる。

制度設計を行う場合を考えると、このような定式化から得られる示唆は非常に興味深い。生じる事象の確率の平均 μ と実現サイズの対数比 a はこのランダム・マルチプリカティブ・プロセスの制度設計であるともいえる。これらのパラメーターを調整することで最終的に実現されるサイズの分布形をシミュレーションすることができることになる。

また、対数正規分布をもつ独立した確率変数の積も対数正規分布になることを考えると、おなじようなプロセスをもつセグメント（たとえば、給与モデルでは入社年次や制度の違う人々の組み合わせ）のパラメーターを組み合わせ、対数正規分布としてシミュレートできると考えられる。

2.2.2 対数正規分布における機会と実現格差

シンプルな二項モデルによるマルチプリカティブ・プロセスは対数正規分布となるが、このときのジニ係数を連続分布関数を使った式 2.8 から計算することは困難である。そこで、累積分布関数の逆関数を使った式 2.6 のアプローチにより、対数正規分布のローレンツ曲線の様子を考えよう。

標準正規分布の累積分布関数を Φ とすると、パラメーター μ_s, σ_s をもつ対数正規分布の累積分布関数は $F_X(x) = \Phi\left(\frac{\log x - \mu_s}{\sigma_s}\right)$ となる。対数正規分布の期待値（平均）は $\mu_x = \exp\left(\mu_s + \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)$ となるので、ローレンツ曲線は式 2.6 より、

$$\begin{aligned}
 L(p) &= \frac{1}{\mu_x} \int_0^p F_X^{-1}(t) dt, \quad p \in [0, 1] \\
 &= \frac{1}{\exp(\mu_s + \frac{1}{2}\sigma_s^2)} \int_0^p \exp(\sigma_s \Phi^{-1}(p) + \mu_s) dp \\
 &= \frac{1}{\exp(\frac{1}{2}\sigma_s^2)} \int_0^p \exp(\sigma_s \Phi^{-1}(p)) dp
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

これによって、パラメーターは σ_s だけになり、 $\sigma_{s1}^2 \geq \sigma_{s2}^2$ なら $L_1 \leq L_2$ となる。式 2.8 と比べてみると、それぞれに対応したジニ係数は $G_1 \geq G_2$ となる。

つまり、対数正規分布となるとときには、ジニ係数はパラメーター σ_s が増大すると大きくなる。

これをシミュレーションで確かめてみたものが、図 2.3 である。対数正規分布のパラメーターを変化させ、1000 程度のサンプル集合を生成させ、そのサイズからジニ係数とパラメーターの関係を図示した。ここでのジニ係数は式 2.1 の平均偏差のアプローチによって計算した。これからもわかるように、ジニ係数は対数正規分布の μ_s には依存せず、 σ_s によって増大する様子が観察できる（図 2.3 の上図左）。

さらに、対数正規分布の期待値は μ_s と σ_s の増加によって増大し、特に σ_s の変化には敏感に増大する（図 2.3 の上図右）。対数正規分布の期待値は

$$E(S) = \exp\left(\mu_s + \frac{1}{2}\sigma_s^2\right) \tag{2.18}$$

で計算されるので、シンプルな二項分布のマルチプリカティブ・プロセスのモデルでは、

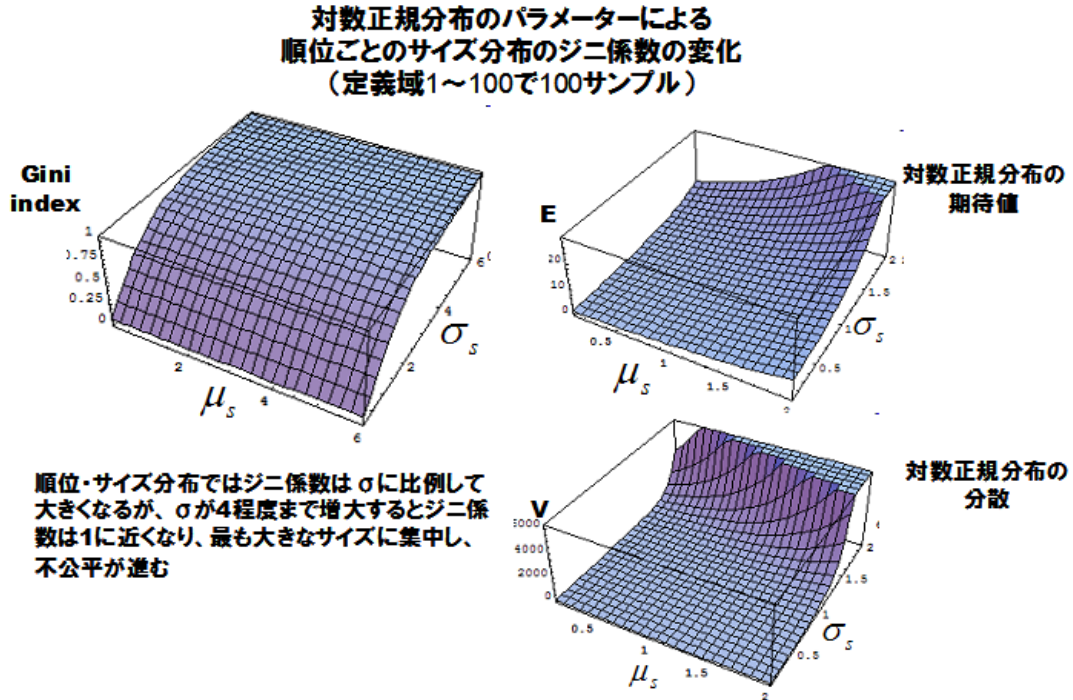
$$\begin{aligned}
 E(S) &= \exp\left(\mu_s + \frac{1}{2}\sigma_s^2\right) \\
 &= \exp\left(\mu a + \log b + \frac{1}{2}(\sigma a)^2\right) \\
 &= \exp\left(\mu \log \frac{z_1}{z_2} + \log z_2^N + \frac{1}{2}(\sigma \log \frac{z_1}{z_2})^2\right)
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

とかける。

つまり、制度設計においては μ は成功機会の期待（平均）、 σ を成功機会のリスク（分散）と考えることができるし、一回の試行で $\log \frac{z_1}{z_2}$ は実現されるサイズの格差（ $z_1 \geq z_2$ ）と考えることができる。

格差問題を論じるときに、チャンスの公平性や実現されるサイズの不平等にスポットが当てられることが多い。特に極端な例はマスコミを通じても拡大されやすい。対数正規分

図 2.3 対数正規分布時のジニ係数のシミュレーション



布をもたらすモデルの成長を分布の期待値の増加であると考えれば、成長は成功機会の増大や一回の試行で実現されるサイズの格差の増大によってもたらされる。ただし、ここでいう「サイズの格差」は実際のサイズ S の分布のジニ係数によって計られる「格差」ではない。よって、成長 = 格差の増大ではないことには注意が必要だ。たとえば地方の経済格差の問題をとらえて、「(小泉改革の) 成長重視政策が格差拡大を招いた」と短絡的に結論づけるのは誤りである。この問題については第3章で論じる。

また、成功機会のリスクの増大といっても下限 (z_2) の低下は成長にマイナスの要因になる。二項モデルでは非常に単純だが、下限 (z_2) は貧困の程度に影響を及ぼす値である。

そして、図 2.3 からわかるように、不平等をあらわすジニ係数については μ_s の影響は全くうけず、 σ_s の増加関数となる。つまり、成功機会の期待 μ だけを高めても人々の心情には多少の期待感があるかもしれないが、不平等の現実は全く改善されない。上述したように、実現されるサイズの格差の増大と成功機会のリスクの増大によって、人々の心情としての期待感が増加するかもしれないが、 σ_s を通じて確実にジニ係数で測られる格差は増大する。

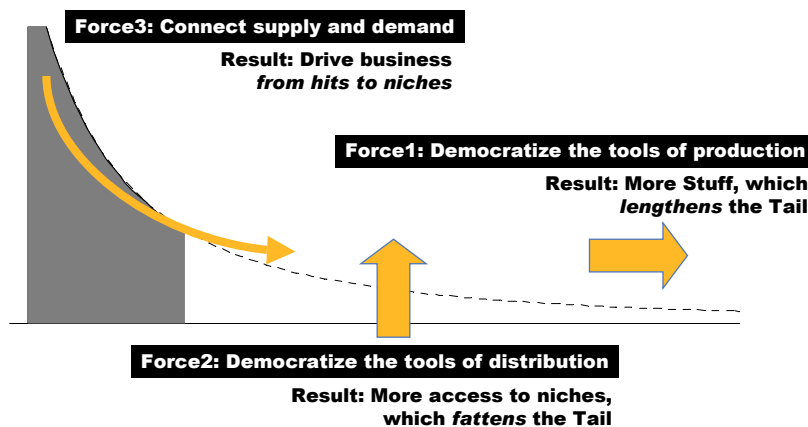
2.3 ロングテール仮説の分布構造

2.3.1 パレート分布と順位・頻度（ロングテール）分布

対数正規分布以外の格差のモデル構造を表現しているものとして、第1章でも触れた「ロングテール」というモデル表現について述べておこう。「ロングテール」という言葉は、ワイヤードの編集長であるクリス・アンダーソンの”The Longtail”(Anderson, 2006)という書物が端緒となり、アマゾン・iTunesなどのIT分野の成功を説明する仮説として一躍有名になった。

それによると、いままでは大多数の「非売れ筋」商品はヒット商品の影に隠れていたが、IT技術によりユーザーのアクセスコストが急激に低下したため、全体の売上の大半は「非売れ筋」に移行するという。ネットやIT技術を利用しない経済では、全体の売上の8割程度を占めるのはトップ10から20%の「ヒット商品」であるとする「パレートの法則」に則ったべき則構造をもっている。それが、IT技術による制作・アクセスコストの劇的な低減により、売上げ分布のヒット商品であるヘッド部分のシェアがさがり、非売れ筋商品のテール部分の割合が増加するというものである(図2.4)。

図 2.4 ロングテールの三つの力
The Longtail(Anderson, 2006) より筆者作成



実は、このロングテール仮説は所得の格差分布と密接な関係がある。所得分布では、大半を占める層では対数正規分布に従うが、上位所得者層の所得分布はパレート分布に従っているという報告 (Souma, 2000, 2002) があるように、ロングテール仮説はべき則を通じて所得上位層のパレート分布と同じ構造をもっている。

前節において対数正規分布の格差表現を議論したが、所得上位層やロングテールに相当するパレート分布についてはどう考えるべきなのだろうか。ここでは、ロングテール仮説におけるアクセスコストの低減による下限の低下と格差の関係について、パレート分布のパレート指数と格差の関係を記述することで考察したい。

サイズ x となる確率変数を X とすると、パレート分布の累積分布関数は

$$\Pr(X \leq x) = 1 - \left(\frac{x_{low}}{x}\right)^\alpha \quad (2.20)$$

このとき x_{low} はサイズ x の下限である。パレートの法則において、あるサイズ以上の頻度がべき則に従うといわれるのは、

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq x) &= 1 - \Pr(X \leq x) = \left(\frac{x_{low}}{x}\right)^\alpha \\ &= Ax^{-\alpha} \end{aligned} \quad (2.21)$$

と表現できるからで、ここで $A = x_{low}^\alpha$ である。

2.3.2 ロングテールにおける順位シェアの変化

アンダーソンのロングテール仮説などで論じられるているのは、これを離散的に大きさの順に並べたときの順位分布による表現が中心である。議論をシンプルにするために、順位（ランク r ）を全要素数 N に対してある正の実数サイズ x 以上である期待値であると考え、順位とサイズの関係は次のように書ける。

$$r = \Pr(X \geq x) \times N = \left(\frac{x_{low}}{x}\right)^\alpha \times N \quad (2.22)$$

これをサイズ x で解くと、順位（ランク r ）のときのサイズ x を表現する関数 $S(r)$ は

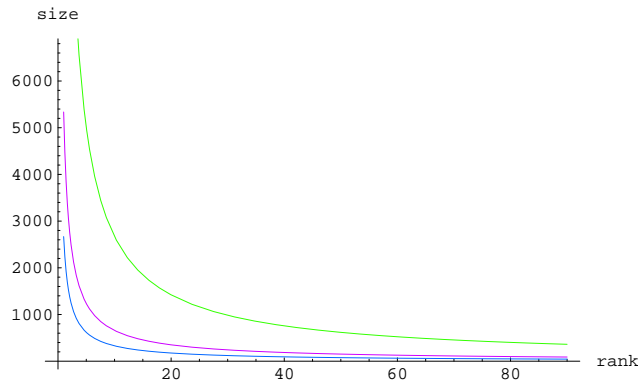
$$S(r) = x = \left(\frac{r}{N}\right)^{-1/\alpha} \cdot x_{low} \quad (2.23)$$

この結果をもとに、パラメーターを変化させて順位・頻度分布を表示したのが図 2.5 である。それぞれのパレート指数は $\alpha = 1.1$ で共通である。

そこで、同じ規模（ $N = 1000$ ）で下限を示すパラメーター x_{low} を低くすると、図 2.5 の（中）から（下）に変化し、いわゆるロングテールは「頭」が下がったように見える。アンダーソン流にいうと、絶対的なトップからの順位（たとえば 1 位から 5 位まで）で定義される「ヘッド」の占める相対的なシェアが低下するということになる。

図 2.5 ロングテール分布の変化

- (上) $\alpha = 1.1$ $N = 10000$ $x_{low} = 5$,
- (中) $\alpha = 1.1$ $N = 1000$ $x_{low} = 10$,
- (下) $\alpha = 1.1$ $N = 1000$ $x_{low} = 5$



しかし， α が変化しない限り本質的な変化はおこらない．たとえば，上位 $a \times 100$ % ($0 \leq a \leq 1$) が全体に占める割合をこの順位・頻度分布で計算すると，上位のシェアは

$$\begin{aligned} Share(a) &= \frac{\int_0^{aN} S(r) dr}{\int_0^N S(r) dr} = \frac{\int_0^{aN} \left(\frac{r}{N}\right)^{-1/\alpha} \cdot x_{low} dr}{\int_0^N \left(\frac{r}{N}\right)^{-1/\alpha} \cdot x_{low} dr} \\ &= a^{1-1/\alpha} \end{aligned} \quad (2.24)$$

となり，サイズのパラメーター N や下限のパラメーター x_{low} に関係なく，パレート指数 α によってのみ変化する．つまり， α が変化しない限り相対的な順位（上位何%など）における本質的な変化はおこらない．

2.3.3 パレート（ロングテール）分布におけるジニ係数

実は，このサイズの相対的なシェアはローレンツ曲線とおなじ事象を説明している．パレート分布におけるローレンツ曲線を式 2.6 より計算すると，累積分布関数は式 2.20 より $F(x) = \Pr(X \leq x) = 1 - (x_{low}/x)^\alpha$ なので，その擬似的な逆関数は $F^{-1}(p) = x_{low}(1-p)^{-1/\alpha}$ となり，平均 $\mu_X = E(X) = \alpha x_{low}/(\alpha - 1)$ のように表現さ

れるので、ローレンツ曲線は

$$\begin{aligned} L(p) &= \frac{1}{\mu_X} \int_{-\infty}^x yf(x)dx \\ &= \frac{1}{\mu_X} \int_0^p F_X^{-1}(t)dt \\ &= 1 - (1-p)^{1-1/\alpha}, \quad p \in [0, 1] \end{aligned} \quad (2.25)$$

のように表現される。ローレンツ曲線は最下位から $p \times 100\%$ までの議論であるので、式 2.24 の上位シェアの裏返しで、 $L(p) = 1 - \text{Share}(1-p)$ となっていることがわかる。

このとき、ジニ係数は式 2.8 より簡単に計算できて、

$$\begin{aligned} G &= 1 - 2 \int_0^1 L(p)dp \\ &= \frac{1}{2\alpha - 1} \end{aligned} \quad (2.26)$$

以上により、パレート分布における不平等をはかるジニ係数はサイズや下限値ではなく、パレート指数 α にのみ依存し、 $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$ なら $G_1 \geq G_2$ となる。そして、 $\alpha \rightarrow 1$ となれば、 $G \rightarrow 1$ となり、ひとりが富を独占する状態になっていく。

パレート分布を前提にしているアンダーソンのロングテール理論では、下限が下がることで順位・頻度分布においてヘッドがさがったり、テールがファットになると主張されている。しかし、ジニ係数のような構造的な不平等はそれによって変化することなく、パレート指数 α が 1 に近づくとつれて、不平等が拡大する構造になっている。

逆に、下限が下がってテールがファットになっても、上位の売上がそれほど低下しない場合は式 2.23 で明らかなように、ランクのべき指数 $1/\alpha$ は大きくなるので、 α は低下してサイズにおけるジニ係数は増大するので、一層格差が拡大してしまう。

同様の指摘としては、(Kaizouji, 2006) は株価指数の不平等分布をしらべ、パレート指数が 1 に近づこうとしているときにバブルが進行している可能性を検証している。また、(高安秀樹・高安美佐子, 2001) が指摘するように、企業規模分布などはべき指数が 1 に近い形になることが報告されている。

2.3.4 対数正規分布とパレート分布の関係

このような対数正規分布とパレート分布の発生をシンプルなランダム・マルチプリカティブ・プロセス

$$X_{t+1} = p_t X_t \quad (2.27)$$

において、両辺の対数をとることで、

$$\begin{aligned}\log X_{t+1} &= \log p_t X_t \\ &= \log(X_0 \times \prod p_t) \\ &= \log X_0 + \log \sum_1^t p_t\end{aligned}\tag{2.28}$$

となることから、最後の式の第二項は中心極限定理によって p_t がどのような分布であっても正規分布に近づいていくので、全体としては対数正規分布になるとされる (Mitzenmacher, 2003)。

ここでは、パレート分布のようなべき則もおなじランダム・マルチプリカティブ・プロセスから生じるが、対数正規分布ではゼロになることを許すのに対して、ゼロではない小さな値を下限にもつことによってべき則が生まれることが指摘されている。

2.4 本章のまとめ

本章では、二項モデルによるマルチプリカティブ・プロセスから生じるサイズの分布が対数正規分布となることを利用して、二項モデルのパラメーターとサイズ分布のパラメーターの関係を記述した。

このような定式化によって、実際の制度設計について、実現されるサイズ分布の形やサイズの成長・格差の変化をシンプルな形でシミュレートできるようになる。特に、対数正規分布のパラメーター μ_s と σ_s の変化はサイズの成長と格差の変化に大きな影響を及ぼす。

また、所得分布などの上位分布において見られるパレート分布をもとに、IT・コンテンツ分野で論じられるロングテール仮説をシミュレートした。これによって、ロングテール仮説がいうコンテンツへのアクセスコストの急激な減少が及ぼす格差への影響を考察した。特に、このときの格差の状態はパレート指数 α に依存し、サイズの成長を伴う単純なアクセスコストの増加による下限の急激な低下は急激な格差の拡大を招くといえる。

3 二項モデルによる所得分布の構造変化分析

3.1 本章のねらい

前章までで、格差分布の特徴的なパラメーターとシンプルな二項プロセスに基づいて実現される格差の関係を記述してきた。本章では、これらの関係性をもとに、実際の分布データをもちいて、そのダイナミックな関係性を分析し、シミュレーションを通じて、格差構造と政策的なインプリケーションの橋渡しを試みる。

分析の枠組みとして、経済物理学のアプローチにおいて参照した (Souma, 2000, 2002) らの方法論を利用する。彼らは、日本の高度成長期から 2000 年までの長期間の所得分布の構造を解析し、

- 年収 2000 万円以下の層では対数正規分布、それ以上の層ではパレート分布が非常によく当てはまる。
- 高額所得者のパレート指数はおおよそ 2 前後で推移し、
- それ以外の所得の対数正規分布の中央値メディアンである X_0 は GDP や土地の価格指数と連動する形で推移している。

と報告している。

本分析では、(Souma, 2000) の分析では使用されていない 2000 年以降のデータを追加し、不平等指数であるジニ係数とパラメーターの変化を考察する。そして、彼らが明らかにした関係性を確認しつつ、さらに、前章までで定式化した制度設計のパラメーターと所得分布の構造変化をもとに考察を加え、シミュレーションにもとづいて制度設計パラメーターと格差分布の間の政策的なインプリケーションを検討していく。

3.2 データと方法

まず、データは国税庁の申告所得と給与実態調査の長期時系列データを利用した (<http://www.nta.go.jp/category/toukei/tokei/jikei/1594/01.htm>)。

(Souma, 2000) と同様に、所得 2000 万円以上には申告所得データを、それ以下は申告所得プラス給与実態調査のデータを組み合わせて利用した。これは 1965 年以降では 2000 万円以上の所得があるものに申告義務があるからである。それぞれのデータがカバーしている範囲は、1998 年で申告所得データは 620 万人、給与実態調査の源泉徴収分では 4540 万人、全体で 5000 万人分以上をカバーしている。

(内閣府, 2006) や (Piketty and Saez, 2006) の報告にあるように, 給与所得の格差は広がり, 所得上位層でも格差の要因の重要な部分を給与所得格差が占めている. 給与所得と申告所得を組み合わせた分析にはこのような実情をカバーする利点もある.

第 2 章で検討したパラメーターを推定するために, まず, 2000 万円以下の層では, 対数正規分布を当てはめて, 所得金額 x である確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ を

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_s^2}} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu_s)^2}{2\sigma_s^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_s^2}} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{(\log x/x_o)^2}{2\sigma_s^2}\right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

としてパラメーターを推定する. このとき, $\log x_o = \mu$ で, x_o は全体の中央値メディアンを表す. また, $\beta = 1/\sqrt{2\pi\sigma_s^2}$ はジブラ指数といわれ, パレート分布におけるべき指数 α と同じように比較される. ただし, このときの対数は (Souma, 2000) らの例に習い, 10 を底とした常用対数を使用する. 実際のパラメーターの推定には, Mathematica の非線形回帰のパッケージを使用し, 入手データの型にあわせて累積分布を作成し, 累積分布関数 $F(x)$ を推定している.

また, 2000 万円を越える層にはパレート分布を適用して,

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq x) &= 1 - \Pr(X \leq x) = \left(\frac{x_{low}}{x}\right)^\alpha \\ &= Ax^{-\alpha} \end{aligned} \quad (3.2)$$

とし, 対数をとることで線形回帰によってパラメーターを推定した.

3.3 分析

3.3.1 パラメーターの推定と所得分布の特徴

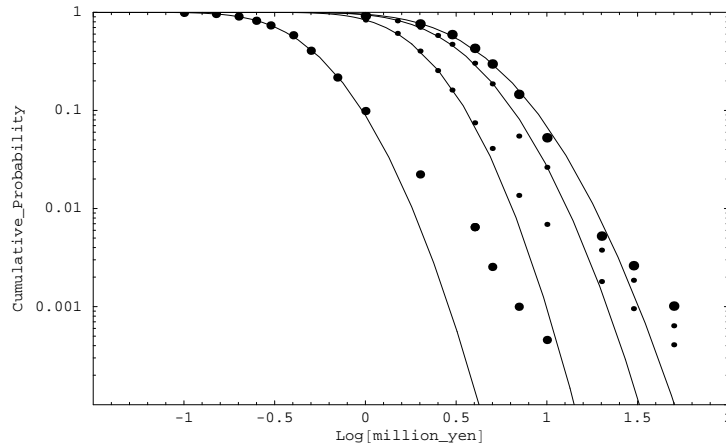
データと確率分布の当てはまり

まず, 各年度のおおよその分布の当てはまりを図 3.1 に表示した. このグラフは横軸に 10^x 百万円の対数をとっており, およそ 1.3 あたりが所得 2000 万円, 1 で 1000 万円, 0 で 100 万円に相当する. 縦軸にはその所得以下となる累積確率を表示してある. (Souma, 2000) でも示されているように, 最近のデータでは, 2000 万円以下では対数正規分布の曲線によくマッチし, それを超える層では対数線形になりパレート分布に則していることが読み取れる.

さらに, 過去のデータを含めてこの分布をみると, パレート分布を当てはめることができそうな対数線形の分布は全体の所得上位 5 % 以上の層に読み取れる. これは (Piketty

and Saez, 2006) の所得上位 1 % 以上の変動が家計所得全体の変動を支配しているという説明と符合するように見える。

図 3.1 経年毎の所得の累積確率の分布
左から 1965 年, 1975 年, 1985 年, 2005 年



高額所得層の変化

所得分布を 2000 万円でわけ、一般層を対数正規分布、高額所得層をパレート分布であるとして推定された α, β のパラメータを年次ごとにグラフ化したものが図 3.2 である。パレート分布のパラメータであるパレート指数 α の動きは高額所得者層の変化を表現している。

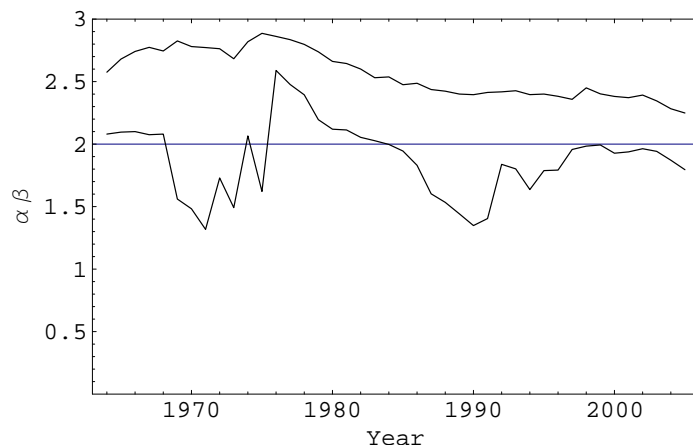
まず、 α は高度成長期に大幅に低下し、1970 年以降に再び上昇に転じ、1980 年代からバブルの絶頂期にむけて急速に低下した。バブル崩壊後は 1998 年まで上昇に転じたが、それ以降再び下降し始めている。(Souma, 2000) での指摘どおり、 α は 2 前後の値で変動し、実際の経済状況をよく反映している。

前章の理論分析の式 2.26 からわかるように、 α が 1 に近づくとしたがつてジニ係数はどんどん 1 に近づき不平等が拡大していく。図 3.2 からは、上位数%以下の高額所得者層において、実際の経済変動に応じた変化が起こっていたことを読み取ることができる。

一般層の変化

一方、対数正規分布のパラメータから計算されるジブラ指数 β や σ_s は一般層の変化を表現しているともいえる。 β は 1970 年代半ばからは概ね下降傾向を示しているが、 α ほどの変動は示していない。図 3.3 は σ_s の推移を示している。 $\beta = 1/\sqrt{2\pi\sigma_s^2}$ なので、 β

図 3.2 α (下) と β (上) の経年変化

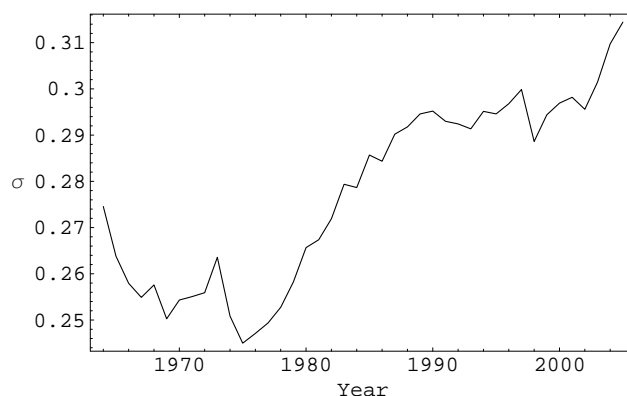


と上下で対称に近い動きをするが、前章の式 2.17 で示したように、対数正規分布では σ_s が上昇すればジニ係数も増大していく。

σ_s は α と異なり、大きな経済変動の影響をあまりうけず、1970 年半ばから徐々に上昇傾向を示している。(内閣府, 2006) でも示されているように、さまざまな統計におけるジニ係数も上昇しているが、この σ_s の上昇傾向はそれを裏付けるものである。

特に、2000 年前後して α, β (または σ_s) とともに格差が拡大する方向を示しているが、これは所得階層によらず全体的な格差拡大傾向を示しているともいえる。

図 3.3 σ_s の推移



メディアンと GDP との関係

(Souma, 2000) は $\Pr(X \geq x) = 0.5$ となるメディアン x_o の推定値と GDP の関係を記

述し、2000 年前後まで一貫して上昇してきていることを示している。

本分析でも、図 3.4 と図 3.5 の左図から分かるように、 x_o の推定値と GDP の関係は、 $x_o \propto 0.0066082GDP$ ($AdjustedR^2 = 0.96$, GDP の単位は兆円) と非常に高い相関を示している。つまり、 x_o は一貫して GDP の成長に応じて上昇してきた。

しかし、近年に限ってみれば図 3.5 の右図で明らかなように、GDP の成長とは相関せず、GDP が成長しても x_o は低下する局面を示している。

図 3.4 x_o の推移

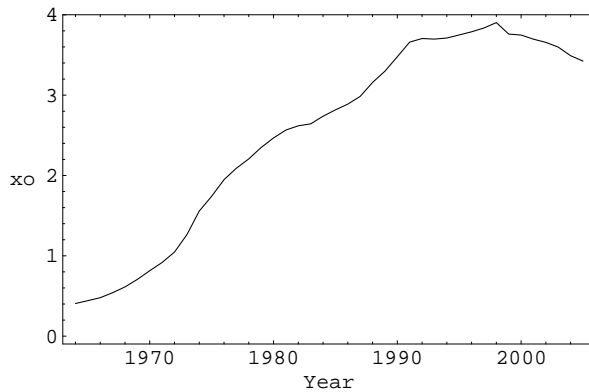
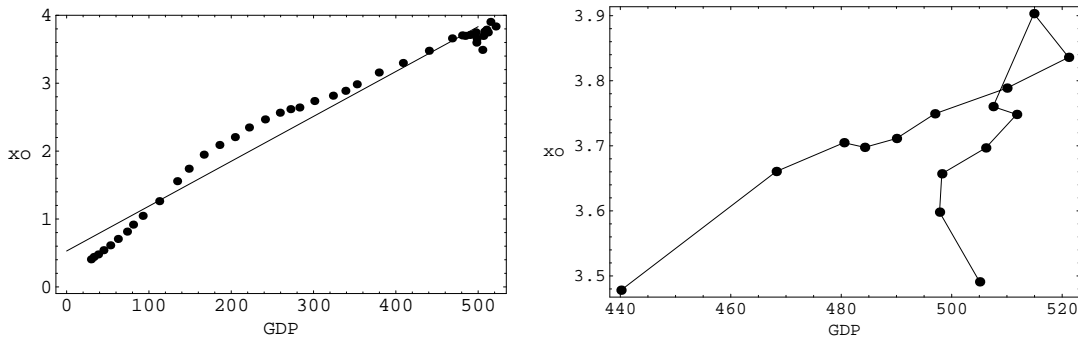


図 3.5 x_o と GDP の関係

左：1964 年から 2005 年まで 右：1991 年から 2005 年



x_o は、式 2.16 より $x_o = 10^{\mu_s} = 10^{\mu a + \log b} = 10^{\mu \log \frac{z_1}{z_2} + \log z_2^N}$ で計算され、機会の平均 μ と実現サイズの格差 $\log \frac{z_1}{z_2}$ が主要な要因となって決定される。

前項でみたように、一貫して σ_s が増大している傾向がある以上、二項モデルによる対数正規分布のパラメーターが $\sigma_s = \sigma \log \frac{z_1}{z_2}$ であることを考慮すると、高度成長から 1990 年代までの中央値が代表する所得は、機会の平均と実現サイズの格差の積が徐々に増加して全体としての増大（経済成長）してきたといえる。

しかし、ここ数年では GDP の成長と乖離し、 σ_s は継続して増大傾向を示している。つまり、全体としての格差はこれまでと同様に拡大の方向にむかっているにも関わらず、所得の中央値である x_o は下がっている。パラメーターの構成から考えて、機会の平均 μ の低下や実現値の下限 z_2 の底割れなどが考えられる。これは GDP の成長の配分がグローバル化などによって企業・組織のなかに蓄積され、個人の所得に十分再配分されていないことが一つの要因として考えられる。

ただ、現時点のデータではその要因を決定することはできず、次節でパラメーターのシミュレーションによるディスカッションのなかで考察する。

3.3.2 ディスカッション

パラメーターの関係性の整理

まず、これまでの分析をもとに各インデックス間関係を整理しておこう。機会の平均 μ とリスク σ 、実現値 $z_1, z_2 (z_1 \geq z_2)$ 、 z_1 の確率 p 、 z_2 の確率 $q = 1 - p$ をもつ二項のシンプルなモデルによって、実現サイズが対数正規分布となる。このとき、対数正規分布のパラメーター σ_s, μ_s と実現サイズの期待値 $E(S)$ 、中央値 x_o 、ジニ係数 G との関係は

$$E(S) = \exp\left(\mu \log \frac{z_1}{z_2} + \log z_2^N + \frac{1}{2}(\sigma \log \frac{z_1}{z_2})^2\right) \quad (3.3)$$

$$x_o \rightarrow \exp(\mu_s) = \exp\left(\mu \log \frac{z_1}{z_2} + \log z_2^N\right) \quad (3.4)$$

$$\sigma_s = \sigma \times \log \frac{z_1}{z_2} \quad (3.5)$$

$$\sigma_{s1} \leq \sigma_{s2} \Leftrightarrow G_1 \leq G_2 \quad (3.6)$$

のように記述できる。

また、パレート分布におけるべき指数 α とジニ係数の関係は

$$G = \frac{1}{2\alpha - 1} \quad (3.7)$$

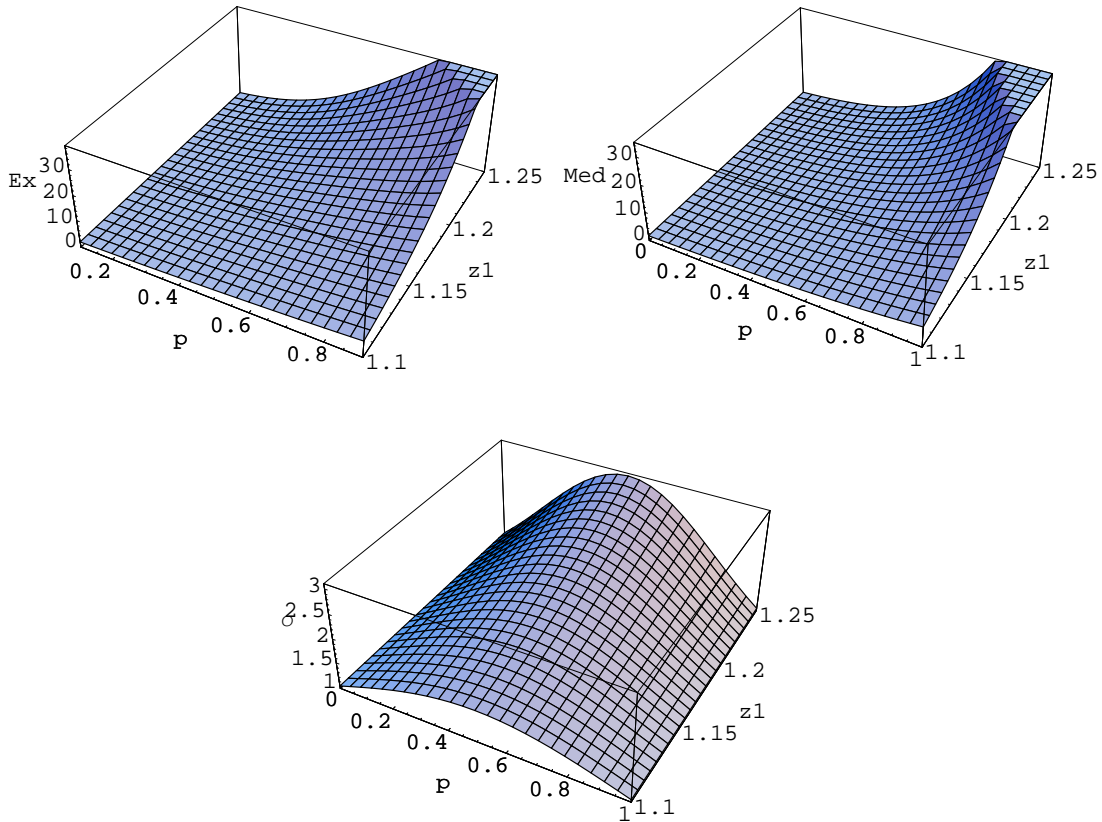
$$1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \Leftrightarrow G_1 \geq G_2 \quad (3.8)$$

のように記述できる。

シミュレーション：年功序列が崩れて、格差が広がるケース

前述のように、これらの関係性を使った所得分布の分析からは、長年にわたる実現サイズの格差と機会の平均・リスクの増大を糧に成長をとげてきた日本経済の姿が伺える。格差が拡大しながらも全体的な再配分がある程度機能し、全体として長期的な成長をとげて

図 3.6 終身雇用が崩れるケースの期待値と格差の変化
 (左) 期待値, (右) 中央値, (下) σ : 格差



きたといえる．しかし，ここ数年では国家全体的な成長を伴っても再配分が機能せず，底割れリスクも伴いながら所得格差だけが增大していることが読み取れる．

これらのパラメーターの関係性もちいて，制度設計のパラメーターとしての z_1, z_2 (それぞれ確率 $p, 1-p$ で発生し，期待値 μ ，分散 σ) と実際に生じる格差分布の関係をシミュレートしてみよう．

たとえば，給与所得分布の中央値 x_o と GDP の関係はこれまでずっと正の相関を示してきたが，近年は GDP の成長が伴いながら x_o が低下していた．バブル崩壊期からの業績回復のなかで，企業はグローバル化への対応や競争の深化に対応するため，業績の回復に対して固定費の伸びを抑えようとしてきた事情を背景に考えることができる．これを給与制度設計という観点から考えると，そのときに設計されたのが，終身雇用・年功序列におけるリニアな所得の伸びを抑えて，個人別の業績評価の導入することである．所得の伸

び幅は減少し、昇給も厳しくなり狭き門としていった。

このケースをパラメーターの関係に置き換えればどうなるだろうか。たとえば、20年 ($N = 20$) ほどの年功賃金において常に2割程度のベアが期待できたような場合は、実現値を $z_1 = 1.2$, $z_2 = 1$, ほとんどの人が上がるので $p = 0.9$ といったパラメーター設計が考えられる。

年功賃金を保ったままで伸びの実現値が $z_1 = 1.2 \rightarrow 1.21$ となると、経済全体の成長も期待され、所得中央値も上昇する一方で、格差も拡大する(表 3.1 の (1))。これは図 3.5 の左図で示した高度成長から 1990 年代までの動向をシミュレートしたものである。

これが年功賃金が崩れて業績重視となり、実現値の上昇分は $z_1 = 1.21 \rightarrow 1.22$ と広がるものの、全員が上昇するのではないので昇格の確率が $p = 0.9 \rightarrow 0.85$ と低下すると設定する。その結果、分布全体の期待値は 32.79 から 33.42 と上昇し、プラス成長となるものの、所得中央値 x_o は 30.91 から 29.38 へと下がり、分散パラメーター σ_s は 1.41 から 1.66 へと増加し、格差は広がる(図 3.1 の (2))。1990 年代以降 2005 年にかけて所得の中央値が下がり、格差が拡大していることが観察された(図 3.5 の右図)が、それはこのような年功賃金崩壊の制度パラメーターの変化でシミュレートできることがわかる。

シミュレーション：成長を伴う底辺の底上げが格差を低減するケース

また、底辺となる z_2 が改善されるケースを考えることで、底辺の底上げと格差の関係を観察することもできる。実現値が $z_1 = 1.2$, $z_2 = 1$, $p = 0.9$ であるときに他のパラメーターは変わらずに、 $z_2 = 1.0 \rightarrow 1.1$ と底上げができれば、分布全体の期待値は 28.10 から 32.61 へと上昇し、分散パラメーター σ_s は 1.39 から 1.17 へと減少するので、格差は低減される(表 3.1 の (3))。

つまり、他のパラメーターを変えずに底辺の底上げをおこなえば、サイズの成長につながり、格差は縮小するという、本論冒頭で触れた経済成長と貧困の関係(白井, 2004)を説明するモデルとも同じ帰結を得ることができる。

成長と格差の関係は必ずしも線形な関係ではない

図 3.6 から明らかなように、サイズの成長と格差の関係は単純な線形ではない。

たとえば、二項モデルにおいては実現値 z_1, z_2 の格差が広がってもそれはジニ係数の拡大につながるとは限らない。実現値の差が拡大すれば格差が広がるように思えるが、 z_1 の確率 p が 0.5 から 0.3 に下がってしまうケースでは値によってはジニ係数は小さくなり (σ_s が減少) 格差が減少することもある(表 3.1 の (4))。同様に、実現値の幅が縮まって

表 3.1 制度設計パラメータシミュレーション (試行回数 N=20)

シナリオ	p	z_1	z_2	$E(S)$	x_o	σ_s
ベース	0.90	1.20	1.0	28.10	26.62	1.39
(1) 成長・所得上昇・格差拡大	0.90	1.21	1.0	32.79	30.91	1.41
(2) 成長・所得下降・格差拡大	0.85	1.22	1.0	33.42	29.38	1.66
(3) 底上げが経済成長に寄与	0.90	1.20	1.1	32.61	32.21	1.17
トレード・オフ 1	0.50	1.20	1.0	9.38	6.19	2.49
(4) 実現値差拡大, 格差縮小	0.30	1.21	1.0	4.32	3.14	2.22
トレード・オフ 2	0.90	1.20	1.0	21.92	18.49	1.79
(5) 実現値差縮小, 格差拡大	0.60	1.19	1.0	11.43	8.06	2.30

も z_1 の確率 p が 0.9 から 0.6 に近づいていけばリスク σ の値によってはジニ係数が増大し、格差が拡大することもおこりえる (表 3.1 の (5))。

二項モデルでは、それぞれの実現値の確率が $1/2$ のときに、機会実現の確率の分散 σ がもっとも大きくなる (図 3.6 の下図)。つまり、 $p = 0.5$ を境界にして、実現値の格差と確率のトレード・オフの関係は逆転しやすくなるような構造をもっているからである。

シンプルな二項モデルによるパラメータの関係からは、サイズの成長 (サイズの期待値の増大) やサイズ格差 (サイズの分散パラメータの増減) の間には、実現値とそれに伴う確率の期待値・分散との間の非常に微妙なトレード・オフな関係があるといえる。実は、二項モデルでなくともサイズの分布が対数正規分布やパレート分布が発生する条件が議論されている (Mitzenmacher, 2003; Kleiber, 2005) ように、このトレード・オフは二項モデル以上に複雑な制度設計のもとでも発生することが想定される。実現値の差という見掛けだけの格差の拡大に目を奪われれば、実際の格差の実態が見えなくなる。マスコミを通じて拡大される「格差問題」は分かりやすさの追求によって、「(実現値による)見掛けだけの格差の拡大のバイアス」が起こっているともいえるだろう。

制度を設計するという視点では、このシンプルな二項モデルによる対数正規シミュレーションにより、微妙なトレード・オフを考慮にいれながら、人々のインセンティブを損なわずに目標を決定するということが重要で、全体の成長戦略や参加者の公平性とのバランスをとる必要があるということが改めて認識されるだろう。

現在は高額層でのバブル？

制度パラメーター設計とは観点を变えて、パレート分布のパラメーター α に着目してみると、全体の上位数%を占める高所得層は経済全体の動静に敏感に反応する形を示している。特に、 α の動向は現状のトレンドからすればバブルに向かっていったときと似たような動きを示している。

このままさらに、 α が低下し、高額層のなかでも格差が拡大し、 $\alpha = 1$ に近づき一部が富を独占するようなバブルがおこるかどうかは、このデータからは判断できない。

ある意味、日本経済全体のうごきの激しい部分は高額層の一部が説明しているともいえるが、逆にそれ以下のほとんどの大衆は実現サイズの格差と機会の平均・リスクの継続的な増大のなかで生活しており、大きな構造変化を伴っていないともいえる。

分析・理論の課題

制度設計とその結果の分布をパラメーターを通してシミュレートできるのは非常に強力だが、これまでの分析には多くの課題がある。

まず、ここでおこなった分析はすべての人々が同じ制度に従うケースである。企業の給与制度は極端な話企業ごとに違う。それを1セットのパラメーターで分析するのはナンセンスである。しかし、さきほどのシミュレーションで示したように、大きな構造変化である場合はそれをシミュレートすることは可能である。

さらに、独立した対数正規分布の積も同じように対数正規分布になる。つまり、

$$\log X_1 X_2 \cdots X_n \rightarrow N(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2) \quad (3.9)$$

と考えることができる。企業群の同時確率分布 $\Pi_1^n X_n$ たとえばすべての企業を考慮できなくても、あるパラメーターパターンによって企業を分類し、分類された企業群の従業員数の比率でパラメーターを積み上げることで、最終的なサイズを集計することができるかもしれない。

これを精緻にモデル化するには困難が予想されるが、可能性は十分にあると思える。

また、本論の分析はあくまでシンプルな二項モデルのもとでおこなっているもので、実現サイズの格差や機会の平均分散についてはもっと一般的な議論が必要である。二項モデル以外に多項分布をつかった多項モデルも有用かもしれない。しかし、単純化して考察することで、現状のマクロな変化に対するミクロレベルの動きを考察する手段を具体的に得ているともいえる。今後はこの関係性をユニバーサルに検討する道具立てを工夫する必要がある。

3.4 結論

本論の議論と分析の結果，明らかになった事項をまとめておこう．

- 経済（サイズ）の成長と格差，貧困について多くの研究がおこなわれているが，開発途上国の経済成長あわせてジニ係数が逆U字型に変動する「クズネッツ仮説」には否定的なコンセンサスがあるなど，経済成長と格差の関係性をダイナミックに推測する理論は十分に形成されていない．
- IT コンテンツ分野で提唱される「ロングテール仮説」も本質的にはこのサイズの成長と格差の問題と同質である．IT 技術によるアクセスコストの劇的な低下とサイズの急激な拡大が格差を縮小するような印象を与えるが，本質的な格差の変化はパレート指数の値の変化によって生じる．ケースにより，格差縮小ではなく急激な拡大につながるなど，曖昧な「ビジネス法則」として誤解を招きやすくなっている．
- マルチプリカティブ・プロセスをつかった二項モデルとその結果生じるサイズ分布モデルの間のパラメーターの関係性を明らかにすることで，制度設計とその結果のサイズ（格差）分布の関連性をシミュレートすることができる．
- 長期の所得分布の分析では，(Souma, 2000) と同様のパラメーターを推定し，名目 GDP と所得中央値 x_o は強い相関関係をもち，高所得者層のパレート指数 α は経済情勢に合わせて大きく変動し，一般層のジブラ指数 β と σ_s は比較的安定的だが緩やかな格差拡大をみせている．
- しかし，1990 年代後半から 2005 年までは名目 GDP と所得中央値 x_o の関係性が変化し，GDP は増加しても所得中央値は低下している．ジニ係数と関連する α は低下， σ_s は増加を示し，高所得層・一般層ともジニ係数増大・格差拡大の方向性を示している．
- この状況は終身雇用・年功序列の変化をとらえた制度設計のパラメーターの変化によってシミュレートすることが可能である．
- 制度設計における実現値の格差，それが実現される確率と実際に生じるサイズ分布の成長・格差の関係は単純な線形関係ではなく，微妙なトレード・オフが存在する．その関係性が見かけ上の格差問題と実際の格差について，大衆の実感と実際のデータとの乖離を生みやすくなっている．

本論では，経済的な関係性や社会的な枠組みを前提とするのではなく，制度的なパラメーターを伴う統計的なダイナミクスを通じて，格差分布の変化を論じることを試み，初

歩的なモデルではあるが、その可能性を確かめることができた。

今後は、複数のパラメーターをもつ主体を統合できるようなモデル拡張や実現値の二項モデルから多項モデル・一般的な確率過程への拡張を行い、複雑な制度設計が扱える枠組みを構築していくことが課題となる。

参考文献

- [1] ANDERSON, CHRIS [2006]: *The Long Tail*: RandomHouse.
- [2] DENINGER, KLAUS & SQUIRE, LYN [1997]: ‘Economic Growth and Income Inequality: Reexamining the Links,’ *Finance and Development* (March), pp. 38–41.
- [3] 下方 拓, [2006]: 「ロングテール考 べき乗分布の性質とコンテンツ経営戦略の接点」, 『世界平和研究所ポリシーペーパー』, **319J** .
- [4] KAIZOUJI, TAISEI [2006]: ‘Power laws and market crashes - Empirical laws on bursting bubbles -,’ *arXiv:physics/0603138*.
- [5] KLEIBER, CHRISTIAN [2005]: ‘The Lorenz curve in economics and econometrics,’ *Invited paper - Gini-Lorenz Centennial Conference - Siena - May 23-26 2005*.
- [6] MITZENMACHER, MICHAEL [2003]: ‘A Brief History of Generative Models for Power Law and Longnormal Distributions,’ *Internet Mathematics*, **1** (2), pp. 226–251.
- [7] 内閣府, [2006]: 『平成 18 年度経済財政白書-第 3 章第 3 説 家計からみた経済格差』, 国立印刷局, 256-281 頁 .
- [8] 大竹 文雄, [2006]: 「「格差はいけない」の不毛 - 政策として問うべき視点はどこにあるのか」, 文春新書編集部 (編) 『論争 格差社会』, 文春新書, 18–31 頁 .
- [9] PIKETTY, THOMAS & SAEZ, EMMANUEL [2006]: ‘The Evolution of Top Incomes: A Historical and International Perspective,’ *The American Economic Review*, **96** (2), pp. 200–205.
- [10] RENDER, S. [1990]: ‘Random Multiplicative Process: An Elementary Tutorial,’ *American Journal of Physics*, **58** (3), pp. 267–273.
- [11] 白井 早由里, [2004]: 「貧困国の民間セクター開発における貿易・投資が経済成長に及ぼす効果 - 国際金融機関・ODA の役割へのインプリケーション - 」, 『平成 15 年度 独立行政法人国際協力機構 客員研究員報告書』.
- [12] SOUMA, WATARU [2000]: ‘Universal Structure of the Personal Income Distribution,’ *arXiv:cond-mat/0011373*.
- [13] ——— [2002]: ‘Physics of Personal Income,’ *arXiv:cond-mat/0202388*.
- [14] 高安秀樹・高安美佐子, [2001]: 『エコノフィジックス 市場に潜む物理法則』, 日

本經濟新聞社 , 32-34 頁 .

- [15] XU, KUAN [2004]: ‘How Has the Literature on Gini’s Index Evolved in the Past 80 Years?’. <http://economics.dal.ca/RePEc/dal/wparch/howgini.pdf>.

下方 拓(げほう たく)

早稲田大学政治経済学部昭和 63 年卒．筑波大学大学院ビジネス科学研究科企業科学専攻修了．博士(経営学)．関東支社企画部，本社広報部報道部門，NTTラーニングシステムズ(株)映像制作事業部を経て，平成 16 年より世界平和研究所主任研究員．平成 19 年からは客員研究員(NTT東日本青森支店企画部勤務)．

連絡先：geho@iips.org